III Krive linije na površi

11 Prva fundamentalna forma površi i Gausove fundamentalne veličine prvog reda.

Neka je površ data jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Tada je prva osnovna forma F_1 površi (ili prva fundamentalna forma površi, ili prva diferencijalna forma površi) određena sa

$$F_1 = \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r}) = (\mathrm{d}\vec{r})^2,$$

gdje je

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}_u' \mathrm{d}u + \vec{r}_v' \mathrm{d}v.$$

Može se pisati da je

$$F_1 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$
$$E = (\vec{r}_u')^2, \quad F = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v'), \quad G = (\vec{r}_v' \cdot \vec{r}_v').$$

Veličine E, F i G ovako definirane zovemo Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama prvog reda ili koeficijentima prve diferencijalne forme.

Jedinični vektor normale površi je određen sa

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{\sqrt{EG - F^2}}$$

1. Zadana je sfera svojom parametrizacijom

$$\vec{r} = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u), \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.

2. Naći prvu diferencijalnu formu ravnine u odnosu na parametrizaciju

$$x = x_0 + \ell_1 u + \ell_2 v$$
$$y = y_0 + m_1 u + m_2 v$$
$$z = z_0 + n_1 u + n_2 v.$$

3. Naći prvu diferencijalnu formu rotacione plohe

$$x = f(u) \cos v, \; y = f(u) \sin v, \; z = g(u)$$

gdje je os rotacije os $0z$.

4. Naći prvu diferencijalnu formu površi zadane eksplicitnom jednačinom

$$z = z(x, y).$$

Primjetimo da ako je površ data jednačinom $\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ Gaussove osnovne veličinama prvog reda se mogu računati na sljedeći način

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}, \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$